EXERCICE N°1 : 25' 5 points

Soit f définie sur $[0, +\infty[\setminus \{e\}$ par : $f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{1}{1 - \ln x} & \text{si } x > 0 \text{ et } x \neq e \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

On désigne par ζ_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que f est continue a droite en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f a droite en 0. Interpréter le résultat graphiquement.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x \to e^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to e^-} f(x)$. Interpréter les résultats.

b) Montrer que la droite $\Delta : y = x$ est une asymptote à ζ_f au voisinage de $(+\infty)$.

c) Etudier la position relative de ζ_f et Δ. **3)** Dresser le tableau de variation de f.

4) a) Déterminer une équation de la tangente D à ζ_f au point d'abscisse 1.

b) Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = x \ln x - x + 1$. Etudier le sens de variation de h et en déduire le signe de h(x). Déterminer alors la position relative de ζ_f et D. **5)** Construire Δ, D et ζ_f.

EXERCICE N°2 : 30' 5 points

Soit définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \begin{cases} x \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) - \dfrac{2}{x^2 + 1}$.

1) a) Dresser le tableau de variation de g.

b) En déduire qu'il existe un unique nombre réel $\alpha > 0$ tel que $g(\alpha) = 0$. Vérifier que $0,5 < \alpha < 0,6$.

2) Déduire des questions précédentes le signe de g(x) sur $]0, +\infty[$.

3) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a : $f'(x) = g(x)$.

4) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

5) Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter le résultat graphiquement.

6) Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{2\alpha}{\alpha^2 + 1}$.

7) Dresser le tableau de variation de f et tracer la courbe ζ_f, $(\alpha \approx 0,5)$.

EXERCICE N°3 : 25' 5 points

1) Soit g la fonction définie par $g(x) = -1 + x + 2 \ln x$.

a) Etudier les variation de g. **b)** Déduire le signe de g(x) et de $g\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

2) On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = x - x^2 \ln x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

a) Montrer que f est continue et dérivable en 0. **b)** Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0, +\infty[$ une unique solution α et que $7/4 < \alpha < 2$.

d) Déterminer la position de ζ_f par rapport à Δ : la tangente à ζ_f en 0. 3) Construire ζ_f et Δ.

EXERCICE N°4 : 25' 4 points

Soit g la fonction définie par : $g(x) = \frac{x+1}{x-3} + \ln|x-3|$. **1) a)** Etudier les variations de g.

b) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet dans $]-\infty, 3[$ une solution unique α et que $\alpha \in]0.7, 0.8[$.

c) Déterminer le signe de g.

2) Soit f la fonction définie par $f(x) = (x+1)\ln|x-3|$. **a)** Etudier les variations de f.

b) Calculer les coordonnées des points d'intersection de C_f et l'axe des abscisses.

c) Vérifier que $f(\alpha) = \frac{(\alpha+1)^2}{3-\alpha}$ et tracer C_f.

EXERCICE N°5 : 30' 5 points

f et g définies sur $[0, +\infty[$ $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x} \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$ et $g(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)$.

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

2) a) Etudier les variations de g.

b) Calculer g(0) et en déduire que pour tout $x \geq 0$, $\ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ et $\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$.

c) Déduire que f est dérivable en 0.

3) Soit h la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $h(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(1+x)$.

a) Déterminer le signe de h sur $[0, +\infty[$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

4) Etudier la position de C_f et la droite Δ : tg en 0. tracer C_f et Δ.

EXERCICE N°6 : 30' 5 points

Soit $\alpha \in]1, +\infty[$, on considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = \alpha$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha = u_n^{2^n}$. **b)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$. En déduire que $u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (\alpha - 1)$.

d) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = 2^n (u_n - 1)$.

a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-\frac{(1-u_n)^2}{2} \leq \ln(u_n) - u_n + 1 \leq 0$ puis que :

$-2^{n-1}(1-u_n)^2 \leq \ln(\alpha) + 2^n(1-u_n) \leq 0$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-\frac{1}{2^{n+1}}(\alpha-1)^2 \leq \ln(\alpha) - v_n \leq 0$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.